A 46. ORTVAY RUDOLF FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI 2015. október 22 – november 2.

1. A mai világban, ahol már semmi sincsen ingyen, még mindig ingyen beállhatunk hűsölni egy emeletes ház árnyékába egy forró nyári napon. Képzeljük el, hogy friss telektulajdonosként szeretnénk ezen változtatni, és el akarjuk kerülni azt, hogy bárki is élvezhesse leendő épületünk árnyékát! Olyan épületet szeretnénk tehát építeni, aminek nincsen árnyéka. Megvalósítható az elképzelés? Ha igen, akkor adott alapterület esetén milyen alakú az ilyen módon megépíthető, maximális térfogatú épület? Tegyük fel, hogy amikor a horizonthoz képesti 5 fok magasság alatt van a Nap, akkor már nincs olyan meleg, hogy érdekeljen minket, van-e árnyék! Vizsgáljuk meg a kérdést különböző alakú telkekre, különböző földrajzi helyszínekre és a nap, illetve az év különböző időszakaira!

(Dálya Gergely és Bécsy Bence)

2. Egy gömb alakú bolygó felszínének egyötödét nem éri el a geostacionárius egyenlítői műsorszóró műholdak sugárzása. Jelölje δ a függőón maximális eltérését a radiális iránytól! Mekkora a δ szög szinusza?

(Dávid Gyula)

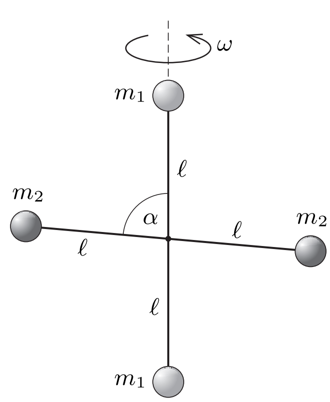
3. Egy α hajlásszögű lejtő és a rajta mozgó test között a súrlódási együttható éppen $\mu = \operatorname{tg}\alpha$. Írjuk le egy test mozgását, ha annak a $\mathbf{v}_0$ kezdősebessége merőleges a lejtő esésvonalára, és adjuk meg, hol és hogyan fog mozogni a test hosszú idő múlva! (Útmutatás: keressünk alkalmas paraméterezést!)

(Woynarovich Ferenc)

4. Egy, a vízszintes talajon álló, R sugarú rögzített gömbre vékony, függőleges sugárban homokot folyatunk. A homokszemcsék elkezdenek csúszni a gömb felületén (tételezzük fel, hogy nincs súrlódás), majd a gömböt elhagyva a talajra pottyannak. Modellezzük a homokszemcsék ütközését a gömbbel a következő módon: a v sebességgel becsapódó homokszemcse sebessége nagyságát megtartva a becsapódási pont érintősíkjában véletlenszerű irányban folytatja útját! Milyen görbét rajzol ki a talajon a homokkal borított terület határa? Tanulmányozzuk a görbét a homoksugár becsapódási pontja helyzetének és a csorgatás magasságának függvényében!

(Dávid Gyula és Cserti József)

5. Egy-egy merev, 2ℓ hosszúságú súlytalan rúd végeire m_1 és m_2 tömegpontokat rögzítünk. Az így kialakított $2m_1$ és $2m_2$ tömegű súlyzókat a középpontjaikban egymással α szöget bezáróan mereven összeerősítjük, és a kapott testet az m_1 tömegű tömegpontokon átmenő tengely körül ω szögsebességgel (a súlytalanság állapotában) megforgatjuk, majd szabadon engedjük. Írjuk le a kialakuló mozgást a tömegek aránya és $\pi/2$ közeli α szögek függvényében! Vizsgáljuk az $m_1 < m_2$ és az $m_1 > m_2$ esetet is!



(Fejős Gergely és Vigh Máté)

6. Mint ismeretes, klasszikus mechanikában a mozgásegyenletek származtatásánál a hatás *első variációjának* eltűnését követeljük meg, mely csupán annyit jelent, hogy a megoldásként adódó koordináta-idő függvény a hatásfunkcionálnak stacionárius helye. Ez azonban még nem ad számot arról, hogy a hatásnak ezen a helyen szélsőértéke van-e, és ha van, akkor az minimum vagy maximum-e. Ennek eldöntéséhez az ún. *második variáció* kiszámítására van szükség. Ebben a feladatban ezt a problémakört vizsgáljuk.

   a) Vizsgálatainkat korlátozzuk egy szabadsági fokú rendszerekre, tehát a Lagrange függvény $L(t, q(t), \dot{q}(t))$ alakú, ahol a pont az időderiváltat jelenti. Mutassuk meg, hogy az

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; L(t, q(t), \dot{q}(t))$$

   hatásintegrál második variációja rögzített t_1 és t_2 határok és a határokon eltűnő $\delta q(t)$ variációk mellett

$$\delta^{(2)} S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[A(\delta q)^2 + B(\delta \dot{q})^2 \right]$$

   alakban írható fel, ahol A és B az időtől, a q koordinátától és a q időderiváltjaitól függhet! Határozzuk meg az A és B együtthatókat!

   b) A továbbiakban vizsgáljuk egy pontrészecske egydimenziós potenciálmozgását, azaz $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x)$ alakú Lagrange-függvényeket! Mutassuk meg, hogy ekkor a hatásintegrál második variációja

$$\delta^{(2)} S = \int \mathrm{d}t \; \delta x \hat{M} \delta x$$

   alakra hozható, és határozzuk meg az $\hat{M}$ operátort is! Milyen feltételt kell kielégítenie $\hat{M}$-nek ahhoz, hogy a hatás minimális, illetve maximális legyen?

   c) Írjuk fel a harmonikus oszcillátor $\left(L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right)$ hatásintegráljának második variációját! Igaz-e, hogy a hatás minimális? Ha nem, akkor adjunk meg olyan $\delta x(t)$ variációt, mely csökkenti a hatást (valamilyen integrációs határok mellett)!

   d) Mit lehet mondani a pontrészecske egydimenziós potenciálmozgása esetén a hatás szélsőértékéről?

   (Kovács Áron)

7. Adjuk meg az alábbi hullámegyenlet:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \alpha^2 \Phi = c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

   általános megoldását! Vizsgáljuk meg az egyenlet által leírt hullámok jellemzőit!

   (Tichy Géza)

8. Egy termodinamikai gép olyan kvázisztatikus körfolyamatot hajt végre minden egyes ciklusban, amelynek képe a koordináta-tengelyekkel párhuzamos szimmetriatengelyű ellipszis

   a) a hőmérséklet–entrópia síkon (tetszőleges anyag esetén);

   b) az entalpia–entrópia síkon (ideális gáz esetén);

   c) a nyomás–térfogat síkon (ideális gáz esetén).

   Adjunk felső korlátot mindhárom termodinamikai gép hatásfokára!

   (Radnai Gyula)

9. Egy rugó energiája és állapotegyenlete: $E = CT + f(x)$ és $F = g(x) - BT$, ahol E a rugó energiája, F a rugóra ható erő, T a hőmérséklete, x a rugó megnyúlása, B és C állandók, végül $f(x)$ és $g(x)$ két előre megadott függvény.

   a) Milyen összefüggésnek kell teljesülnie az $f(x)$ és $g(x)$ függvények között, hogy a Carnot-körfolyamat hatásfoka a jól ismert

$$\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$$

   kifejezés legyen, ahol T_1 és T_2 a hideg és a meleg hőtartály abszolút hőmérséklete?

   b) Vizsgáljunk két esetet! Az első esetben a rugó áll a talajon, és egy m tömeg nyomja össze, a másik esetben a rugó lóg, és m tömeg nehézségi ereje nyújtja. Számoljuk ki mindkét esetben a rugó hőkapacitását!

   c) Vizsgáljuk a b) esetet akkor, ha $f(x) = \frac{1}{2} D x^2$!

   (Tichy Géza)

10. „Lehetetlen élettelen anyagi hatóerők közreműködésével az anyag bármely részéből mechanikai effektust kinyerni azáltal, hogy az az őt körülvevő testek leghidegebbikének a hőmérséklete alá hűl." (Kelvin) „Hő soha nem mehet át egy hidegebb testből egy melegebbe anélkül, hogy azzal összefüggésben, vele egy időben valamilyen más változás ne következzék be." (Clausius)

    Ragaszkodván ezen törvény betűjéhez, mutassuk meg, hogy lehetetlen lencséket, tükröket, optikai szálakat vagy bármilyen hasonló eszközöket elrendezni oly módon, hogy azok egy testet a napfény ráfókuszálásával a Nap felszínénél melegebbre hevítsenek!

    A törvény betűjéhez való ragaszkodás alatt nem azt értjük, hogy olyan megoldast várunk, ami előfeltételezi Kelvin vagy Clausius szövegezésének egy mélyreható elemzését. Amire gondolunk, az az, hogy tartózkodjunk az olyan fogalmak használatától, amelyek nem fordulnak elő a törvény fenti megfogalmazásaiban. Ilyen például az entrópia. Vannak, akik szerint a második főtétel tartalma az, hogy létezik az entrópia, azaz egy olyan additív és extenzív állapotfüggvény, ami egy adiabatikus folyamatban soha nem csökken, és pontosan akkor nő, ha a folyamat irreverzibilis. De a mi feladatunk épp annak eldöntése, hogy mi lehetséges adiabatikusan egy adott rendszerben, ennélfogva egy olyan érvelés, ami az entrópia fogalmára alapul, magában hordozza a körkörösség hibájának a veszélyét.

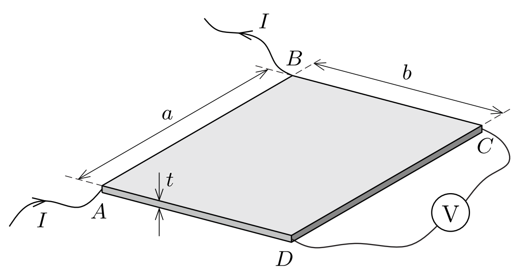
    Vegyük észre továbbá, hogy Kelvin vagy Clausius törvényének az alkalmazásakor meg kell bizonyosodnunk afelől, hogy kezdetben és a folyamat végén a rendszer olyan komponensekből áll, amelyek mindegyike egy egyensúlyi termodinamikai állapotban van. Az állapotváltozás alatt a komponensek mindenféle kölcsönhatásban részt vehetnek, például sugárzást adhatnak át egymásnak. De ha a végén marad valami elnyeletlen sugárzás, akkor az egy olyan komponens, ami nem jellemezhető egy termodinamikai állapottal, következésképpen az egész rendszer (közvetlenül) nem esik bele a törvény hatókörébe. Ha viszont a sugárzást valamilyen termodinamikai komponenssel elnyeletjük, vagy befogjuk, és például egy doboz fotongázzá alakítjuk, akkor nem fog akadályt gördíteni a törvény alkalmazásának az útjába. A Nap folyamatosan sugároz, ezért ahhoz, hogy az állításunkat a második főtételből bebizonyítsuk, a tényleges rendszert egy olyan módosított rendszerrel kell kapcsolatba hoznunk, amire a törvény nehézségek nélkül alkalmazható, és aminek a tulajdonságaiból következtethetünk valamire az eredeti rendszerre vonatkozóan.

    (Farkas Szilárd és Zimborás Zoltán)

11. Egy földelt fém tórusz leíró (generáló) körének sugara r, a leíró kör középpontja pedig R távolságra helyezkedik el a forgástengelytől. Határozzuk meg egy a forgástengelyen a középponttól h távolságra elhelyezett q ponttöltésre ható erőt!

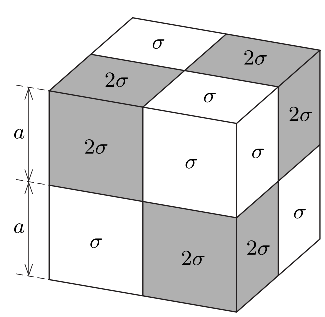
    (Széchenyi Gábor)

12. Egy a és b oldalélű, t vastagságú ($t \ll a, b$), σ vezetőképességű, téglalap alakú fémlemez A csúcsába I erősségű áramot vezetünk, B csúcsából pedig elvezetjük azt. Mekkora feszültség mérhető a fémlemez C és D csúcsa között? Számítsuk ki a feszültséget $b = a$ és $b = a/2$ esetén!



    (Vigh Máté)

13. Egy $2\times2\times2$-es Rubik-kocka nyolc tömör, homogén, a oldalélű fémkockából áll. Ebből négy kocka vezetőképessége 2σ, míg a másik négy kocka σ vezetőképességű. A különböző vezetőképességű daraboknak nincs közös lapja (lásd az ábrát). A teljes Rubik-kocka két szemközti lapjára egy-egy igen jól vezető fémlemezt helyezünk, és U_0 feszültséget kapcsolunk rájuk. Számítsuk ki, hogy mekkora áram folyik a fémlemezek között!



    (Gnädig Péter és Vigh Máté)

14. Egy vezető gömbhéj két tetszőleges pontját egyenes vezető köti össze. Az egyenes vezetőben I nagyságú áram folyik. Két végpontja között a töltések visszaáramlása a gömbhéjon történik. Határozzuk meg az áramok mágneses terét a gömbhéj belsejében és a gömbhéjon kívül!

(Sasvári László és Vigh Máté)

15. Egy végtelen síkon a töltések forgásszimmetrikus eloszlását az alábbi sűrűségfüggvény írja le:

$$\varrho(\mathbf{r}) = \frac{Qd}{(r^2 + d^2)^{3/2}}\delta(z),$$

ahol r a síkon az origótól mért távolságot jelenti, z a síkra merőleges távolság, d pedig egy hosszúság-dimenziójú állandó. Forogjon ez a sík állandó ω szögsebességgel a z tengely körül! Számítsuk ki a mozgó töltéseloszlás által generált $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ mágneses indukcióvektort a tér minden pontjában! A megoldást zárt alakban adjuk meg! Diszkutáljuk a kapott térkonfiguráció sajátosságait!

(Oroszlány László)

16. Anizotrópia fővárosában annyira komolyan veszik a KRESZ „jobbra hajts” szabályát, hogy a rendőrség a Fény Nemzetközi Évére való tekintettel elrendelte: a jobbra tartó fény köteles kétszer akkora sebességgel mozogni, mint a balra tartó. (Az egyéb irányokkal szerencsére nem kell törődniük, hiszen ebben az országban a tér mindössze egyetlen dimenziós.) A rendelet életbe lépése után az összes óra, méterrúd és ikerpár is köteles a fentiekkel összhangban viselkedni. A rendőrség egyébként nagyon tiszteli Einsteint, ezért az általa felismert speciális relativitási elv hatályban marad: a fenti szabályok tetszőleges inerciarendszerben érvényesek, tehát pl. a jobb-, illetve baloldali fénysebesség minden inerciarendszerhez képest ugyanaz.

Dolgozzuk ki az Anizotrópiában érvényes speciális relativitáselmélet szabályait! Adjuk meg a Lorentz-transzformáció mátrixainak megfelelőit! Mutassuk meg, hogy ezek az anizotróp Lorentz-transzformációk is csoportot alkotnak! Keressük meg a csoport kanonikus paraméterét, és fejezzük ki segítségével a mátrixelemeket! Vezessük le a sebességösszeadás és -kivonás formuláját! Mekkora az inerciarendszerek maximális relatív sebessége? Írjuk fel azt az 1+1 dimenziós (skalár) hullámegyenletet, amelyet a törvény- és KRESZ-tisztelő fény kielégíteni köteles! (Lelkesebb megoldók kidolgozhatják az általánosabb elméletet is, amelyben a jobbra menő fény c_+, a balra menő fény c_- sebességgel terjed, a két érték tetszőleges, de nem azonos.)

Mynden Lee Ben Canal, a közismert tudományos szkeptista a fejét csóválja. Azt állítja, hogy a fentebb kidolgozott fizika nem is igazán új, hanem izomorf valami közismert elmélettel. Vajon igaza van-e?

(Dávid Gyula)

17. Oldjuk meg az $F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k$ elektromágneses térerősség-tenzor (ahol $A_k(x)$ az elektromágneses potenciálok négyesvektora) sajátérték-problémáját! Mi a sajátértékek és a sajátvektorok fizikai jelentése? Diszkutáljuk a speciális szinguláris eseteket!

(Dávid Gyula)

18. A gravitációs jelenségeket az általános relativitáselmélet megszületése előtt egy $\Phi(x)$ gravitációs skalárpotenciál segítségével próbálták leírni a speciális relativitáselmélet keretein belül. A „gravitációs négyeserőt” a klasszikus analógia következtében „tömeg $\times$ a gravitációs potenciál gradiense” alakban vesszük fel. Ezért az elmélet mozgásegyenlete a következő:

$$\frac{d}{d\tau}(Mu_k) \;=\; M\,\partial_k\Phi(x),$$

ahol M a részecske (nyugalmi) tömege, u_k a négyessebesség (c-re normált) négyesvektora, τ pedig a részecske sajátideje. Vizsgáljuk meg ebben az elméletben a homogén gravitációs térben történő függőleges szabadesés problémáját, azaz legyen a Φ gravitációs potenciál egyszerűen $\Phi = gz$, ahol z a függőleges koordináta, g pedig a szokásos gravitációs gyorsulás! (Az egyszerűség kedvéért dolgozzunk a $c = g = 1$ egységrendszerben!) A vizsgált részecske a $t = 0$ pillanatban induljon H magasságból, nulla kezdősebességgel! Kezdjük ugyanebben a pillanatban a τ sajátidő mérését! Számítsuk ki a részecske ω rapiditását a τ sajátidő függvényében, majd ennek alapján határozzuk meg a részecske v hármassebességét és z koordinátáját a t rendszeridő, illetve a τ sajátidő függvényében! Legfeljebb meddig élvezheti a zuhanó részecske a szabadesés örömeit? Elérheti-e a részecske véges rendszeridő, illetve véges sajátidő alatt a fénysebességet? Ha a zuhanó test H magasságból indul, mekkora (hármas)sebességgel csapódik be a talajba, és mekkora (hármas)impulzust ad át neki? Vizsgáljuk meg a kapott eredmények nemrelativisztikus határesetét (ehhez írjuk vissza a képletekbe a c és g dimenziós mennyiségeket), és mutassuk meg, hogy visszakapjuk a newtoni fizika törvényeit! Ha g megegyezik a Föld felszínén mérhető gravitációs gyorsulással, milyen magasról kell leejteni a testet, hogy 1 ezreléknyi eltérés lépjen fel a klasszikus és a relativisztikus eredmények között?

(Dávid Gyula)

19. Albert Einstein általános relativitáselméletének egyik alappillére az általános ekvivalencia-elv, mely szerint semmilyen lokálisan véghezvitt méréssel nem különböztethető meg a gravitáció a gyorsulástól. Wilbert Zweistein viszont azt állítja, hogy egy próbatömeggel ellátott rugós erőmérő és egy hőmérő segítségével lokálisan el tudja dönteni, hogy egy nagy tömeg (pl. csillag) által keltett gravitációs vonzást, avagy laboratóriumának gyorsulását észleli. Mire gondolhat, és igaza lehet-e?

(Fejős Gergely)

20. Mutassuk meg, hogy ha az általános relativitáselméletben a téridő sztatikus, azaz a metrikus tenzor komponensei nem függnek a nulladik (idő-)koordinátától, valamint a metrikus tenzor vegyes $g_{0\alpha}$ komponensei mind nullák, akkor a gravitációs térben szabadon eső test geodetikus mozgásegyenlete megkapható a klasszikus mechanika $L = K - V$ alakú Lagrange-függvényéből, amelyben a keresett általános koordináták az $\mathbf{r}$ hármas helyvektor x^α komponensei ($\alpha = 1, 2, 3$) a t rendszeridő (vigyázat: nem a τ sajátidő!) függvényében!

A K kinetikus energia kvadratikus függvénye az $\dot{x}^\alpha$ sebességkomponenseknek, a $V(\mathbf{r})$ mennyiség pedig az $\mathbf{r}$ helyvektor valamilyen függvénye. Határozzuk meg a kinetikus energia együtthatóit tartalmazó Hesse-mátrixot és a $V(\mathbf{r})$ „effektív gravitációs potenciális energiát”! Milyen viszonyban van a most használt Lagrange-függvény az általános relativitáselmélet kovariáns írásmódjának szokásos $(-mc^2)$ Lagrange-függvényével?

Mi a helyzet, ha a részecske nem szabad, azaz (adott) külső erőtérben, pl. elektromágneses vagy skalármezőben mozog?

(Dávid Gyula)

21. Bungee jumping egy fekete lyukba. Alíz és Bob expedíciót szerveznek, hogy felderítsék egy szupermasszív fekete lyuk belsejét, azt remélve, hogy kijuthatnak onnan. Külön űrhajókban lassan radiálisan leereszkednek $1.01\, r_S$ sugárig, ahol $r_S = 2GM/c^2$ a Schwarzschild-féle fekete lyuk eseményhorizontjának a sugara, szinkronizálják óráikat ($\tau_A = \tau_B = 0$), majd Bob kikapcsolja a hajtóműveit, és elkezd radiálisan beesni a fekete lyukba. Az r_S horizontot τ_{B1} sajátidőnél lépi át. Alíz az $1.01\, r_S$ sugárnál marad, vár egy azonos $\tau_{A1} = \tau_{B1}$ sajátidőt, majd Bob után lő egy elektronokból álló vékony Q töltésű, v kezdeti sebességű, a fekete lyukkal koncentrikus gömbhéjat azzal a szándékkal, hogy megmentse őt.

A Reissner–Nordström-ívelem egy töltött, gömbszimmetrikus, izotróp, M tömegű és Q töltésű fekete lyukon kívül

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

$G = c = 4\pi\epsilon_0 = 1$ egységekben.

a) Mekkora az eseményhorizont koordinátasugara a gömbhéjon kívül, miután a gömbhéj elérte a szingularitást?

b) Mekkora legyen v, hogy a gömbhéj utolérje Bobot, mielőtt Bob beesik a szingularitásba?

c) Ki tud-e Bob szabadulni Alízhoz Q és v megfelelő megválasztásával?

Hanyagoljuk el az árapályerőket, az elektromágneses és gravitációs sugárzást, a kvantumos effektusokat, a csillagközi anyagot és a gravitációs gyorsulással szembeni emberi tűrőképesség korlátait!

(Kocsis Bence)

22. A nagyenergiás asztrofizika leglátványosabb jelenségei közé tartoznak a relativisztikus jetek. A fekete lyukak közelében relativisztikus kiáramlás figyelhető meg, ahol a részecskék Lorentz-faktora elérheti a $\Gamma = 1000$ értéket. A nagyenergiás részecskék eredete még nem tisztázott, felgyorsításukért feltehetően a forgó fekete lyuk és egy gázkorong által keltett mágneses tér közti kölcsönhatás a felelős. Vizsgáljuk ehelyett azt a lehetőséget, hogy a központi objektum valójában egy maximálisan kiterjesztett Kerr-téridő! A maximálisan kiterjesztett Kerr-téridő a stacionárius, vákuumbeli Einstein-egyenletek egyértelmű megoldása egy M tömegű, forgó objektum körül. A „kiterjesztett” arra utal, hogy a fekete lyuk belsejében a téridő további aszimptotikusan sík univerzumokat köt össze. Megfigyelők egy időszerű világvonal mentén beléphetnek az egyik univerzumból a fekete lyukba, és azon keresztül átjuthatnak egy másik aszimptotikusan sík univerzumba anélkül, hogy érintenék a gyűrű alakú szingularitást. Határozzuk meg, hogy a fotonok és tömeges részecskék geodetikusait jellemző megmaradó mennyiségeknek (E energiának, L_z impulzusmomentumnak, és a K Carter-állandónak) milyen feltételeket kell kielégíteniük ahhoz, hogy a részecskék az egyik univerzumból belépjenek a horizontba, ne ütközzenek a szingularitással, és kirepülhessenek egy másik univerzumban a végtelenbe! Milyen a kirepülő részecskék képe a másik univerzum végtelenjében levő sztatikus megfigyelők számára a részecske-energia és a Kerr-téridő dimenziótlan forgási paraméterének függvényében?

(A tömeges részecskéket és a fotonokat tekintsük pontszerű tesztrészecskének, a kvantum- és elektrodinamikai effektusokat, valamint a részecskék gravitációs visszahatását a téridőre hanyagoljuk el!)

(Kocsis Bence)

23. Mutassuk meg, hogy egy több azonos atomból álló halmazban az egy atomra jutó kötési energia, azaz a kohéziós energia közelítőleg a koordinációs szám négyzetgyökével arányos!

(Tichy Géza)

24. Legyen A és B két tetszőleges, egymással nem kommutáló 2×2-es hermitikus mátrix! Konstruáljunk meg az összes olyan egyre normált állapotvektort, amelyre nézve az A és B mennyiségekre felírt határozatlansági reláció egyenlőségként teljesül!

(Dávid Gyula)

25. Tekintsük a legegyszerűbb kvantummechanikai modellt egy drótban terjedő részecskére, mely egy pontszerű potenciálon tud szóródni! Az időfüggő Schrödinger-egyenlet az alábbi alakú:

$$i\hbar\,\partial_t\,\Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_x^2\,\Psi(x,t) + g\,\delta(x)\,\Psi(x,t),$$

ahol g a Dirac-delta potenciál csatolási erőssége. Ha megfelelő egységekben $g \in \mathbb{R}$, és $g > 0$, akkor taszító potenciállal van dolgunk, míg $g < 0$ vonzó potenciált ír le.

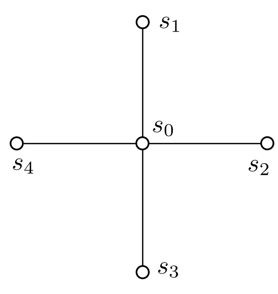
Először állítsuk elő a pozitív energiájú sajátállapotokat, azaz a szórási állapotokat, valamint számítsuk ki a transzmisszió és reflexió amplitúdóit, mint az energia, a g csatolási állandó és m függvényeit – ez elemi feladat. Azután mutassuk meg, hogy $g > 0$ esetén a szórási állapotok teljes rendszert alkotnak! Mi a helyzet $g < 0$ mellett?

Ha $g \in \mathbb{C}$, az időfüggő Schrödinger-egyenlet értelmes marad a szórási problémára. Ha $\operatorname{Im} g < 0$, a hullámfüggvény normája idővel csökken. Ezt fizikailag oly módon értelmezhetjük, hogy a szórópotenciál a dróton kívüli térbe is ki tudja szórni a részecskét, míg a hullámfüggvény normája a drótban maradás valószínűségét adja meg. Határozzuk meg a reflexió és transzmisszió valószínűségét, és ábrázoljuk az eredményt tipikus értékek mellett az $\operatorname{Im} g$ függvényében! Milyen $\operatorname{Im} g$ esetén a legvalószínűbb, hogy a részecske a dróton kívüli térben köt ki? Mit mondhatunk a szórási állapotok rendszeréről, ha g komplex, $\operatorname{Im} g < 0$? Meg lehet-e válaszolni ugyanezeket a kérdéseket $\operatorname{Im} g > 0$ esetén?

(Asbóth János és Györgyi Géza)

26. Kutatók megfigyelték, hogy a világűrben molekuláris hidrogén (H_2) alakulhat ki atomi hidrogénből (H), ha a folyamatot a közegben jelenlévő közvetítők (gázmolekulák, jégkristályok és szennyezők) segítik. Az ilyen katalizátorok képesek adszorbeálni a H-atomokat, amelyek ezt követően rácshelyről rácshelyre vándorolnak az alagúteffektus révén. Amint két H-atom találkozik ugyanazon a rácsponton, lejátszódhat a $\mathrm{H} + \mathrm{H} \to \mathrm{H}_2 + \gamma$ reakció, amely után a (H_2) molekula kilép a kristályból, a kristály pedig elnyeli a reakcióban keletkezett foton energiáját ($E_\gamma \approx 4,5$ eV).

A reakció szimulálására válasszunk egy igen leegyszerűsített modellt, amelyben egy H-atom a $t = 0$ időpillanatban éppen az s_0 (négyszögletes) rácspontban tartózkodik (lásd az ábrát), és onnan az idő teltével nem távozhat máshová, mint a négy szomszédos rácspont (s_1, s_2, s_3 és s_4) egyikébe.



Ha kezdetben elhanyagoljuk az alagutazás lehetőségét, akkor a $|\varphi_i\rangle$ állapotok ($i = 0, \ldots, 4$), amelyekben az atom az adott rácshely közelében tartózkodik, a $\hat{H}_0$ Hamilton-operátor ugyanazon E_0 sajátenergiához tartozó ortonormált sajátállapotai lesznek.

A $|\varphi_0\rangle$ állapot és a $|\varphi_k\rangle$ állapotok ($k = 1, \ldots, 4$) közötti csatolás módosítja a Hamilton-operátort. $\hat{H}_0$-hoz hozzá kell adnunk egy $\hat{H}_1$ perturbáló tagot, amelyet a

$$\hat{H}_1\,|\varphi_0\rangle = -a\,(|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle + |\varphi_3\rangle + |\varphi_4\rangle),$$

$$\hat{H}_1\,|\varphi_k\rangle = -a\,|\varphi_0\rangle$$

egyenletek definiálnak, ahol az a mennyiség egy valós, pozitív állandó és $k = 1, 2, 3, 4$. Az összes többi lehetséges csatolást elhanyagoljuk. Oldjuk meg a modell kvantummechanikai mozgásegyenleteit!

a) Keressük meg alkalmas módon a teljes $\hat{H}$ Hamilton-operátor ortonormált sajátfüggvényeit, és adjuk meg a hozzájuk tartozó energia-sajátértékeket, valamint azok degenerációját!

b) Tegyük fel, hogy a $t = 0$ időpillanatban a H-atom éppen az s_0 rácspontban tartózkodik! Írjuk fel az atom $|\varphi(t)\rangle$ állapotfüggvényét egy tetszőleges későbbi t időben! Mekkora T idő elteltével állíthatjuk nagy bizonyossággal, hogy az atom (rács)helyet változtatott?

c) Határozzuk meg a T időtartam számértékét az a paraméter alkalmas megválasztása mellett!

(Magyar Péter)

27. N darab $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1\uparrow_2\ldots\uparrow_N\rangle + |\downarrow_1\downarrow_2\ldots\downarrow_N\rangle)$ állapotban összefonódott spint szétküldünk N számú megfigyelőhöz. Az i-dik megfigyelő egy $\mathbf{t}_i$ irányú Stern-Gerlach analizátorral fogadja a spint, és megmérve a spinvetületet ± 1 értéket kap ($\hbar/2$ egységben). Jelölje P_{ij} annak a valószínűségét, hogy az i-dik és j-dik megfigyelő ugyanazt mérte! Mennyi a $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P_{ij}$ kifejezés minimuma? Hogyan kell ekkor a megfigyelőknek beállítaniuk a polarizátorokat? Az egyszerűség kedvéért minden megfigyelő $\mathbf{t}_i$ vektora essen az $x - z$ síkba!

Mi történik, ha az összefonódott spinek helyett 1/2 – 1/2 valószínűséggel küldünk $+z$ irányba polarizált ($|\uparrow_1\uparrow_2\ldots\uparrow_N\rangle$), illetve $-z$ irányba polarizált ($|\downarrow_1\downarrow_2\ldots\downarrow_N\rangle$) spineket? Mennyi lesz ekkor a korábban leírt mennyiség minimuma? Hogyan állítsuk ehhez a polarizátorokat az $x - z$ síkban?

(Széchenyi Gábor)

28. Pályaintegrálok segítségével néha egyszerűbb nem szigorú bizonyítást adni egy-egy matematikai összefüggésre, amelynek a precíz igazolása igencsak munkaigényes lehet. Itt a sztochasztikus kalkulus témaköréből tanulmányozunk egy olyan problémát, amit funkcionálintegrálok használatával viszonylag könnyen megoldhatunk.

Tekintsünk egy részecskét, aminek a valós egyenesen mért R helyzete kielégíti a következő elsőrendű sztochasztikus differenciálegyenletet:

$$\dot{R} = F(R) + \xi. \tag{1}$$

Itt F egy sima függvény, $\dot{R}$ az R időderiváltja, ξ pedig egy fehér zaj. Közelebbről ξ egy Gauss zaj, azaz ha $G[\xi]$ a ξ-nek egy funkcionálja, akkor a várható értéke

$$\langle G\rangle = \int \mathcal{D}\xi\, \exp\left(-\tfrac{1}{\eta}\int \mathrm{d}t\, \xi(t)^2\right) G[\xi], \tag{2}$$

ahol $\mathcal{D}\xi$ a szokásos (megfelelően normált) pályaintegrál mértéke szerinti integrálást jelöli. Az Itó-interpretációban az (1) egyenlet diszkretizált formája az

$$\frac{R_{i+1} - R_i}{\Delta t} = F(R_i) + \xi_i \tag{3}$$

alakot ölti, ahol az alsó index a diszkrét időt, Δt pedig egy időlépés hosszát jelöli. Ha $G[\xi]$ a ξ-nek csak egy korlátos időintervallumon felvett értékeitől függ, akkor a diszkretizált modellbeli várható értéke kifejezhető egy közönséges véges dimenziós integrál formájában. Valójában az egyik módja annak, hogy az (2) egyenletben felírt pályaintegrálnak értelmet adjunk, éppen ilyen diszkretizált várható értékek kontinuum limeszére alapul.

Legyen $p(t, x)$ a részecske t időben vett pozíciójának a valószínűségsűrűsége. A diszkretizált modellel kezdve, majd a $\Delta t \to 0$ kontinuum limeszt véve, bizonyítsuk be, hogy p kielégíti a következő parabolikus parciális differenciálegyenletet:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\eta}{4}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(Fp). \tag{4}$$

Ez a Fokker–Planck-egyenlet. A Sztratonovics-féle értelmezésben a diszkretizált mozgásegyenlet:

$$\frac{R_{i+1} - R_i}{\Delta t} = F\left(\frac{R_{i+1} + R_i}{2}\right) + \xi_i. \tag{5}$$

Végigkövetvén az Itó-esetre vonatkozó levezetést, mutassuk meg, hogy a Sztratonovics-diszkretizáció által esetleg szükségessé tett változtatásoktól függetlenül végül ugyanarra a Fokker–Planck-egyenletre jutunk, mint az Itó-esetben!

(Farkas Szilárd és Zimborás Zoltán)

29. Tekintsük az N-komponensű skalártér hatványszámolás szerint renormálható $O(N)$ szimmetrikus térelméletét 3+1 dimenzióban, melynek Lagrange függvénye

$$L = -\frac{1}{2}\,\Phi_i(\Box + m^2)\Phi_i - \frac{\lambda}{24N}\,(\Phi_i\Phi_i)^2,$$

ahol $m > 0$ és $\lambda > 0$ pozitív állandók. Tekintsük a sajátenergia perturbatív sorát λ tetszőleges értéke mellett $N \gg 1$ esetén! Rajzoljuk fel az összes gráfot, mely az $1/N$ szerint haladó sor vezető és vezetőn túli rendjében járulékot ad! Wick-forgatás után, cutoff-regularizációban határozzuk meg a tömeg és csatolási ellentagokat vezető és vezetőn túli rendben! Ábrázoljuk a renormált sajátenergiát rögzített impulzus mellett a cutoff függvényében λ különböző értékei mellett! Mit állapíthatunk meg a modell renormálhatóságáról?

(Fejős Gergely)

30. Tekintsük a következő egyszerű befektetési alap-kezelési modellt:

A piac minden nap p_t valószínűséggel felfelé mozdul ($x_t = +1$), és $(1 - p_t)$ valószínűséggel lefele ($x_t = -1$).

Minden reggel az alapkezelő eldöntheti, hogy az alap vagyonának mekkora r_t hányadát fekteti piaci eszközökbe. Az alap W_t vagyonának alakulását a következő leképzés írja le ($W_1 = 1$):

$$W_{t+1} \;=\; W_t\,(1 + r_t\,x_t).$$

Az r_t befektetési ráta negatív is lehet: ez annak felel meg hogy „shortoljuk” a piacot, tehát arra játszunk hogy a piac lefelé fog elmozdulni.

A piaci elmozdulásokat generáló p_t valószínűségek sztochasztikus sorozatáról a következőket tételezhetjük fel: Kezdeti értéke 0,5 és 0,7 közé esik. Kvázi-folytonos, azaz egy nap alatt nem változik többet, mint 0,01. Értéke végig 0,4 és 0,8 közé esik.

Feladatunk alapkezelőként az, hogy minden reggel meghatározzuk az r_t befektetési rátát. Ennek érdekében a következő adaptív stratégiával dolgozunk:

$$r_1 = r,$$
$$r_{t+1} = max\,(-0,5;\,min\,(0,9;\,a\,r_t + b\,x_t + c)).$$

Az egyenletben szereplő min-max feltételek regulátori kényszerek: Nem fektethetünk be többet mint az alap vagyonának 90%-a, és csak a vagyon 50%-át shortolhatjuk. Az (r, a, b, c) paraméter-négyes specifikálja a stratégiánkat.

Célunk az, hogy egy éves távon (ez $T = 250$ kereskedési napot jelent) a lehető legjobban teljesítsen az általunk kezelt alap, azaz a lehető legmagasabb legyen a W_{250} évvégi eredmény a konkurens alapok eredményeihez képest.

Tíz konkurens alappal kell versenyeznünk. Ezek közül kilenc passzívan menedzselt; a következő állandó befektetési rátákkal dolgoznak: $r = 0;\,0,1;\,0,2;\,0,3;\,0,4;\,0,5;\,0,6;\,0,7;\,0,8$. (Ezekre a többi paraméter tehát: $a = 1$; $b = 0$; $c = 0$.) A tizedik egy aktívan kezelt alap, amelyik egy fent definiált adaptív stratégiával dolgozik. Az alap kezelője a feladat kitűzője.

A befektetők az év végén sorbaállítják a tizenegy alap eredményét, és a legjobb alapot 100 ponttal jutalmazzák, a másodikat 90-nel, a harmadikat 80-nal, és így tovább. A leggyengébb eredményű alap 0 pontot kap. Célunk az, hogy várható pontszámunkat maximalizáljuk (azaz várható helyezésünket minimalizáljuk). Hogyan specifikáljuk adaptív stratégiánkat?

A feladatra kapható pontszám 50%-át a javasolt stratégia konkrét eredménye alapján fogom meghatározni, 100 000 próbafutás empirikus átlagával közelítve a várható eredményt.

Kérem a versenyzőket, hogy megoldásuk legelején, jól látható módon adják meg az (r, a, b, c) specifikációt. A másik 50%-kal a megoldás gondolatmenetét pontozom.

Kulcsszavak: „*kelly criterion*”, „*kalman filter*”.

(Bihary Zsolt)

31. Az infravörös (IR) kamerák általában a 7,5–14 mikrométeres hullámhossz-tartományban dolgoznak, ami az ún. „atmoszférikus IR ablak”. Ebben a sávban a légkör jobbára átlátszó. Ennek ellenére, ha a kamerát függőlegesen felfelé irányítjuk a tiszta (felhőtlen) égboltra, nem az űr néhány Kelvines hőmérsékletét „látjuk”, hanem egy (−60) – (−40) Celsius fok körüli értéket. Ez főleg a légkörben található vízpára (gyenge) IR sugárzása, aminek intenzitása az ún. teljes vízoszlop (az atmoszférában található víz integrált mennyisége mm egységekben) függvénye. Növekvő zenitszög értékeknél egyre nagyobb (melegebb) hőmérsékletet észlelünk.

A feladat a tiszta égbolt látszólagos hőmérsékleti mintázatának a meghatározása pl. a zenitszög és irányszög (azimut) függvényében.

Egyszerűsítő feltevések: a) A légköri vízpára 100 %-a a troposzférában található, b) A vízpára koncentrációja a troposzférában homogén (nem igaz, nagyon erős a változékonysága, de ezt most elhanyagoljuk), c) A vízpára nem csak sugároz, hanem el is nyel, de tekintsük az optikai mélységet konstansnak (legyen mondjuk 5000 m).

Kiegészítő kérdés: mekkora hibát vétünk, ha a Föld görbületét elhanyagoljuk?

(Jánosi Imre)

\end{document}